Drei-, Vier- und Fünf-Grundgrößen-Gleichungen in der Elektrodynamik

Stille, Ulrich

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 1, 1949, S. 56-75

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Drei-, Vier- und Fünf-Grundgrößen-Gleichungen in der Elektrodynamik

Von **Ulrich Stille**

Vorgelegt von Herrn **G. Cario**

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Anstalt, Braunschweig)

Equations with 3, 4 and 5 fundamental quantities in electrodynamics

By **U. Stille**

Abstract: The laws of the electromagnetic field are shown in systems with 3, 4 and 5 fundamental quantities. On a system of equations containing 3 fundamental quantities the various modes of treatments introducing electrostatically, electromagnetically and symmetrically defined quantities are discussed in detail and the relations of connexion between these three kinds of quantities and the respective quantities of the system with 4 fundamental quantities are developed and compiled. Moreover, the alternative, rational ÷ non-rational, originating in merely geometrical conditions and treated in the preceding paper, is inserted in these relations. The transition from one system to another may be carried out according to the method of variation of quantities and variation of units; the second method fails in case of transition from the system with 4 fundamental quantities to the symmetrical one with 3 fundamental quantities. General equations are given for the system with 5 fundamental quantities from which equations between numerical values result, if the field constants ε_0 and μ_0 and the quantity $\gamma = c_0 \sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}$ are disposed of in a certain physical meaning according to unit and numerical value. Making use of the geometrical "corresponding coefficients" at the same time, one may obtain, from this system with 5 fundamental quantities, all required rational or non-rational ways of writing of systems with 5, 4 and 3 fundamental quantities. In addition, some inferences are drawn for the relations between units and numerical values of the electrical and magnetic quantities.

1. Einleitung

Die verschiedenen Gleichungsschreibweisen, Größendefinitionen und Einheitenfestlegungen in der Elektrodynamik werden von zwei Alternativen beeinflußt, die selbst voneinander unabhängig sind. Es sind dieses: einmal die Möglichkeit einer rationalen oder nicht-rationalen Behandlung, zum anderen die unterschiedliche Darstellung der Gesetzmäßigkeiten des elektromagnetischen Feldes mit 3, 4 oder 5 Grundgrößen. Das Problem der Rationalisierung, das rein geometrischer Natur ist, wurde in der voraufgehenden Abhandlung[11]) gesondert behandelt. In der vorliegenden Veröffentlichung wollen wir den zweiten Fragenkreis, der die physikalische Auffassung und Beschreibung der Elektrodynamik betrifft, betrachten.

Als man die systematische Erforschung der Elektrizität und des Magnetismus in Angriff nahm, war man sich durchaus bewußt, daß mit diesen Erscheinungen ein völlig neuartiger Bereich der Physik erschlossen wurde. Die Formulierung der dieses Gebiet regelnden Gesetze erforderte die quantitative Festlegung der Proportionalitäten, die man zwischen den zur Beschreibung der beobachteten Vorgänge gebildeten Begriffen gefunden hatte. Hierfür standen damals jedoch lediglich mechanische Meßverfahren zur Verfügung, deren man sich auch bediente. Infolgedessen erhielten die Einführung und Messung der beschreibenden Größen und das zwischen diesen bestehende Gleichungssystem einen der mechanischen Behandlungsart ähnlichen Charakter: Die Gesamtheit der Meßverfahren ließ sich auf 3 Grund-Meßverfahren zurückführen, entsprechend die Gesamtheit der Größen aus 3 Grundgrößen ableiten und abgestimmte Einheitensysteme aus 3 Grundeinheiten aufbauen.

In späteren Stadien der Entwicklung hatten sich neben den ursprünglichen mechanischen Meßverfahren, die wesentlich auf Längen-, Kraft- und Zeitmessungen beruhten, spezifisch elektrische Meßmethoden herausgebildet, welche die Festlegung spezifisch elektrischer Grundeinheiten, wie beispielsweise der des Widerstandes, der Stromstärke oder der Spannung, gestatteten. Weiter setzte sich die Erkenntnis durch, daß man dem Wesensinhalt der Elektrodynamik und der Feldvorstellung durch Einführung einer vierten, spezifisch elektrischen Grundgröße (z. B. der elektrischen Ladung) und durch explizite Definition der Feldkonstanten ε_0 und μ_0 wesentlich besser gerecht wird. Diese Tatsachen führten zu einer Auffassung und Behandlung der Gesetzmäßigkeiten des elektromagnetischen Feldes, die in ihrer Darstellung von der früheren mechanistischen abwich. Sie fanden ihren Niederschlag in einer Form der Größendefinition und Gleichungsschreibweise, aus der ein Größengleichungssystem mit 4 Grundgrößen resultierte. In dieser Art ihrer Einführung sind sämtliche die Elektrodynamik beschreibenden Größen aus 4 Grundgrößen abzuleiten, alle Meßverfahren auf 4 Grund-Meßverfahren (beispielsweise die der Längen-, Zeit-, Widerstands- und Spannungsmessung) zurückzuführen und die passenden abgestimmten Einheitensysteme aus 4 Grundeinheiten aufzubauen.

In neuerer Zeit wurde wiederholt betont [1, 2, 3]), daß der Übergang zu einem System mit 5 Grundgrößen zweckmäßig sei, wenn man die Gesamtheit der Erscheinungen und die Vielfalt der bisherigen Darstellungsarten und Einheitenfestlegungen umfassen will. Dabei wird als fünfte Grundgröße eine magnetische Größe, beispielsweise die magnetische Polstärke oder der magnetische Kraftfluß vorgeschlagen. In einer solchen Behandlung der Elektrodynamik wird die für das Vierer-System charakteristische, definitionsmäßige Rückführung der magnetischen Größen auf die elektrischen Größen wieder aufgehoben und beiden Größenarten unabhängig voneinander ein gleichberechtigter Platz eingeräumt. Eine solche magnetische Grundgröße gewinnt auch in Hinblick auf das magnetische Moment des Neutrons eine besondere Bedeutung, wenn auch, worauf Sommerfeld schon hinweist, die praktische Realisierung einer entsprechenden magnetischen Grundeinheit zunächst auf Schwierigkeiten stößt.

Im Bereich der experimentellen und angewandten Physik wird ebenso wie in der theoretischen und praktischen Elektrotechnik heute die klassische Elektrodynamik fast ausschließlich auf der Basis von 4 Grundgrößen dargestellt. Die theoretische Physik und speziell die Atomphysik bevorzugen dagegen weitgehend eine Behandlung des elektromagnetischen Feldes in der gleichungsmäßigen Formulierung der Dreier-Systeme, wie sie bis zum Ausgang des vorigen Jahrhunderts noch allgemein üblich war. Dieses Nebeneinanderbestehen verschiedener Gleichungsschreibweisen, Größendefinitionen und entsprechender Einheitenfestlegungen erschwert in vielen Fällen die Übersicht und hat leider oft Anlaß zu Mißverständnissen gegeben. Wir wollen hier in den folgenden beiden Abschnitten die physikalischen Zusammenhänge zwischen diesen Darstellungen vom Standpunkt der Größeneinführung und der Größengleichungen aus klarlegen und so eine gleichungsmäßige Brücke zwischen diesen beiden Auffassungen schlagen. Ihr Zusammenhang mit einem Fünfer-System soll im vierten Abschnitt behandelt werden.

2. Vier-Grundgrößen-Gleichungen

Wir gehen vom Vierer-System aus, welches heute sich immer weiter durchsetzt. Unter den nicht-indizierten Formelzeichen wollen wir die elektrischen und magnetischen Größen verstehen, wie sie durch ein Gleichungssystem mit 4 Grundgrößen eingeführt und miteinander verknüpft werden. Die Frage, welche 4 Größen wir aus der Gesamtheit der elektrischen und magnetischen Größen als Grundgrößen auswählen, ist dabei von sekundärer Bedeutung und wird durch Überlegungen gleichungstechnischer Zweckmäßigkeit oder der praktischen Realisierungsmöglichkeit der zugehörigen Grundeinheiten bestimmt — festgelegt wird durch die Benutzung eines bestimmten Größengleichungssystems stets nur die Zahl der Grundgrößen. Für die Gleichungenüberführung oder eine definierende Größenverknüpfung sind die Grundgrößen-Kombinationen Länge, Masse (oder Kraft oder Energiedichte), Zeit, absolute Dielektrizitätskonstante bzw. absolute Permeabilität oder auch Länge, Masse, Zeit, elektrische Ladung bzw. magnetischer Kraftfluß geeignet, für die Aufstellung abgestimmter Einheitensysteme die Grundeinheiten von Länge, Masse, Zeit, Widerstand oder Länge, Zeit, Widerstand und Spannung. Wir interessieren uns hier für die Grundgrößenkombinationen. In der Tabelle 1 stellen wir als Übersicht für einige elektrische und magnetische Größen ihre Dimensionen in den entsprechenden Vierer-Dimensionssystemen $\mathsf{LMT}\varepsilon_0$, $\mathsf{LMT}\mu_0$, LMTQ, $\mathsf{LMT}\Phi$ zusammen.

Während in den Dreier-Systemen die elektrischen und magnetischen Größen von den dem Newtonschen Massenanziehungsgesetz formal nachgebildeten elektrischen und magnetischen Punktkraftgesetzen ausgehend definiert wurden, werden diese Größen in der Auffassung des Vierer-Systems über spezifisch elektrische Meßverfahren eingeführt. Einzelheiten brauchen hier nicht wiederholt zu werden. Es wird für unsere weiteren Betrachtungen ausreichen, wenn wir einige grundlegende Gesetzmäßigkeiten der Elektrodynamik in der formelmäßigen Darstellung des 4-Grundgrößen-Gleichungssystems zusammenstellen. Wir wählen hierfür die Maxwellschen Grundgleichungen nebst Randbedingungen, die Relationen zwischen den beschreibenden Feldvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}$ im materieerfüllten Feld, die Gleichungen für Energiedichte w und Energieströmung $\mathfrak{S}$, die Punktkraftgesetze und die Differentialgleichungen für das skalare Potential φ und das vektorielle Potential $\mathfrak{A}$*).

*) Daß die Gleichungen (1) bis (13) zu einem Gleichungssystem mit 4 Grundgrößen gehören, zeigt eine einfache algebraische Überlegung. Der Inhalt der phänomenologischen Elektrodynamik wird durch die beiden Maxwellschen Gleichungen mit ihren Randbedingungen zusammengefaßt. Bei der Abzählung der durch diese Beziehungen verknüpften Größen ist folgendes zu beachten: Flächen und Längen dürfen nicht als voneinander unabhängige Größen betrachtet werden, da zwischen ihnen eine zusätzliche Relation besteht, z. B. in der Form $d\mathfrak{f} = d\mathfrak{s}_1 \times d\mathfrak{s}_2$; relative Dielektrizitätskonstante und Permeabilität sind dimensionslose Materialkonstanten, welche bei das ganze Feld erfüllenden isotropen Medien durch das Verhältnis der Flußdichte, gemessen in einem

Tabelle 1. Dimensionen elektrischer und magnetischer Größen in den Dimensionssystemen $\mathsf{LMT}\varepsilon_0$, $\mathsf{LMT}\mu_0$, LMTQ, $\mathsf{LMT}\Phi$

Größe	Dimension im System			
	$\mathsf{LMT}\varepsilon_0$	$\mathsf{LMT}\mu_0$	LMTQ	$\mathsf{LMT}\Phi$
U, φ . .	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1} \varepsilon_0^{-1/2}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-2} \mu_0^{1/2}$	$L^2 M T^{-2} Q^{-1}$	$T^{-1} \Phi$
I	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-2} \varepsilon_0^{1/2}$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1} \mu_0^{-1/2}$	$T^{-1} Q$	$L^2 M T^{-2} \Phi^{-1}$
$\mathfrak{G}$. . . .	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-2} \varepsilon_0^{1/2}$	$L^{-3/2} M^{1/2} T^{-1} \mu_0^{-1/2}$	$L^{-2} T^{-1} Q$	$M T^{-2} \Phi^{-1}$
$\mathfrak{E}$. . . .	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1} \varepsilon_0^{-1/2}$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-2} \mu_0^{1/2}$	$L M T^{-2} Q^{-1}$	$L^{-1} T^{-1} \Phi$
$\mathfrak{D}$ . . .	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1} \varepsilon_0^{1/2}$	$L^{-3/2} M^{1/2} \mu_0^{-1/2}$	$L^{-2} Q$	$M T^{-1} \Phi^{-1}$
ε_{abs} . .	ε_0	$L^{-2} T^2 \mu_0^{-1}$	$L^{-3} M^{-1} T^2 Q^2$	$L M \Phi^{-2}$
$\mathfrak{P}$. . . .	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1} \varepsilon_0^{1/2}$	$L^{-3/2} M^{1/2} \mu_0^{-1/2}$	$L^{-2} Q$	$M T^{-1} \Phi^{-1}$
Q. . . .	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} \varepsilon_0^{1/2}$	$L^{1/2} M^{1/2} \mu_0^{-1/2}$	Q	$L^2 M T^{-1} \Phi^{-1}$
C. . . .	$L \varepsilon_0$	$L^{-1} T^2 \mu_0^{-1}$	$L^{-2} M^{-1} T^2 Q^2$	$L^2 M \Phi^{-2}$
R. . . .	$L^{-1} T \varepsilon_0^{-1}$	$L T^{-1} \mu_0$	$L^2 M T^{-1} Q^{-2}$	$L^{-2} M^{-1} T \Phi^2$
$\mathfrak{H}$. . . .	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-2} \varepsilon_0^{1/2}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1} \mu_0^{-1/2}$	$L^{-1} T^{-1} Q$	$L M T^{-2} \Phi^{-1}$
$\mathfrak{B}$. . . .	$L^{-3/2} M^{1/2} \varepsilon_0^{-1/2}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1} \mu_0^{1/2}$	$M T^{-1} Q^{-1}$	$L^{-2} \Phi$
$\mathfrak{A}$. . . .	$L^{-1/2} M^{1/2} \varepsilon_0^{-1/2}$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1} \mu_0^{1/2}$	$L M T^{-1} Q^{-1}$	$L^{-1} \Phi$
μ_{abs} . .	$L^{-2} T^2 \varepsilon_0^{-1}$	μ_0	$L M Q^{-2}$	$L^{-3} M^{-1} T^2 \Phi^2$
$\mathfrak{M}$ . . .	$L^{-3/2} M^{1/2} \varepsilon_0^{-1/2}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1} \mu_0^{1/2}$	$M T^{-1} Q^{-1}$	$L^{-2} \Phi$
p, Φ . .	$L^{1/2} M^{1/2} \varepsilon_0^{-1/2}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} \mu_0^{1/2}$	$L^2 M T^{-1} Q^{-1}$	Φ
L. . . .	$L^{-1} T^2 \varepsilon_0^{-1}$	$L \mu_0$	$L^2 M Q^{-2}$	$L^{-2} M^{-1} T^2 \Phi^2$
$\mathfrak{K}$. . . .	$L M T^{-2}$	$L M T^{-2}$	$L M T^{-2}$	$L M T^{-2}$
w. . . .	$L^{-1} M T^{-2}$	$L^{-1} M T^{-2}$	$L^{-1} M T^{-2}$	$L^{-1} M T^{-2}$
$\mathfrak{S}$ . . .	$M T^{-3}$	$M T^{-3}$	$M T^{-3}$	$M T^{-3}$

senkrecht zur Feldrichtung geschnittenen Querschlitz, zur Flußdichte, gemessen in einem in Feldrichtung gebohrten Längskanal, gegeben werden ($\varepsilon = D_{QS}/D_{LK}$; $\mu = B_{QS}/B_{LK}$) und somit auch nicht als unabhängige Größen zu werten sind. Wir schreiben die Grundgleichungen nebst Randbedingungen hin und zählen die in ihnen auftretenden unabhängigen Größen ab:

$\oint \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{s} = \int \varkappa \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \varepsilon \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f}$	l, t, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}$, $\varkappa$, ε_0
$\oint \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{s} = -\mu_0 \frac{d}{dt} \int \mu \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{f}$	μ_0
$\varepsilon_0 \oint \varepsilon \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f} = \Sigma Q$	Q
$\mu_0 \oint \mu \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{f} = 0$	—
4 Gleichungen	zwischen 8 Größen

Zur eindeutigen Auflösung von 4 Gleichungen zwischen 8 Größen sind 4 zusätzliche Verfügungen erforderlich: Gleichungssystem mit 4 Grundgrößen.

$$\oint \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{s} = \int \mathfrak{G} \cdot d\mathfrak{f} + \frac{d}{dt}\int \mathfrak{D} \cdot d\mathfrak{f} = \int \varkappa \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int \varepsilon \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f} \qquad (1)$$

$$\oint \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{s} = -\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{f} = -\mu_0 \frac{d}{dt}\int \mu \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{f} \qquad (2)$$

$$\oint \mathfrak{D} \cdot d\mathfrak{f} = \Sigma Q \quad (3) \qquad \oint \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{f} = 0 \quad (4)$$

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathfrak{E} = \varepsilon_0 \mathfrak{E} + \mathfrak{P} \quad (5) \qquad \mathfrak{B} = \mu \mu_0 \mathfrak{H} = \mu_0 \mathfrak{H} + \mathfrak{M}^{*)} \quad (6)$$

$$w_e = \frac{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}}{2} \quad (7) \qquad w_m = \frac{\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B}}{2} \quad (8) \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \quad (9)$$

$$\mathfrak{K}_e = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r^2}\,\mathfrak{r}^0 = Q\mathfrak{E} \quad (10) \qquad \mathfrak{K}_m = \frac{p_1 p_2}{4\pi \mu \mu_0 r^2}\,\mathfrak{r}^0 = p\mathfrak{H}^{*)} \quad (11)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\eta}{\varepsilon \varepsilon_0} \quad (12) \qquad \Delta \mathfrak{A} = -\mu \mu_0 \mathfrak{G} \quad (13)$$

Als abgestimmte Einheitensysteme dienen Maßsysteme mit 4 Grundeinheiten, beispielsweise das Giorgische MKS Ω_{abs}-System mit den Grundeinheiten m, kg, s, Ω_{abs} oder das gleichwertige, jedoch für die praktischen Bedürfnisse bequemere m s V_{abs} A_{abs}-Maßsystem.

3. Dreier-Systeme

Während die Punktkraftgesetze im 4-Grundgrößen-Gleichungssystem lediglich Spezialfälle der allgemeinen Kraftgesetze darstellen, bilden sie für die Dreier-Systeme den Ausgangspunkt der Definitionen, da durch sie elektrische Ladung und magnetische Polstärke direkt an eine Längen- und Kraftmessung angeschlossen werden. Für Dimensionsbetrachtungen werden in diesen Systemen meist Länge, Masse (oder Kraft oder Energiedichte), Zeit als Grundgrößen angesehen. Die elektrischen und magnetischen Größen besitzen also in dieser Art der Größeneinführung eine andere Dimension als in ihrer Definition im Vierer-System.

Man hat die Gesetzmäßigkeiten der Elektrizität und des Magnetismus einmal vom elektrischen Punktkraftgesetz her zunächst für ihren elektrischen Teil

---

*) Die hier benutzte Definition für die magnetische Polarisation $\mathfrak{M}$ und die Polstärke p entspricht der Einführung des magnetischen Momentes $\mathfrak{m}_{\mathfrak{M}} = \int \mathfrak{M} \cdot d\tau = p\,d\mathfrak{s}$ aus dem mechanischen Drehmoment $\mathfrak{N}$, welches z. B. ein Magnet vom magnetischen Moment $\mathfrak{m}_{\mathfrak{M}}$ in einem magnetischen Feld erfährt

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{M}} \times \mathfrak{H}. \qquad (14\text{a})$$

Das durch die Drehmomentgleichung

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{J}} \times \mathfrak{B} \qquad (14\text{b})$$

definierte magnetische Moment $\mathfrak{m}_{\mathfrak{J}}$ führt zu der von Mie, Sommerfeld, Westphal und anderen Autoren bevorzugten Magnetisierung $\mathfrak{J} = \mathfrak{M}/\mu_0$ und zur Polstärke $p^* = p/\mu\mu_0$. Dieser Unterschied in der Definition der magnetischen Größen ist für unsere Betrachtungen ohne Belang. In einer neuen Veröffentlichung legt Döring[4]) im einzelnen dar, daß die erste Auffassung [Gleichung (14a)], die auch wir hier der Definition der magnetischen Größen zugrunde legen, die physikalisch allein sinnvolle sei.

entwickelt und dann über das Biot-Savartsche Gesetz auf das magnetische Feld ausgedehnt, zum anderen umgekehrt beim magnetischen Punktkraftgesetz beginnend den magnetischen Teil aufgebaut und über das Biot-Savartsche Gesetz auf das elektrische Feld erweitert. Eine dritte Behandlungsweise geht für den elektrischen Teil vom elektrischen Punktkraftgesetz, für den magnetischen Teil vom magnetischen Punktkraftgesetz aus und verknüpft dann beide Teile durch das Biot-Savartsche Gesetz. Diese drei verschiedenen Auffassungen oder Definitionsarten wollen wir als die elektrostatische, die elektromagnetische und die symmetrische Behandlung kennzeichnen und nacheinander ihre Beziehungen zum Vierer-System darlegen.

a) Elektrostatisches Dreier-System. Die elektrostatisch eingeführten elektrischen und magnetischen Größen kennzeichnen wir durch mit dem Index ^{s} versehene Formelsymbole. Sie bilden einen Satz von Größen, zwischen denen ein Gleichungssystem mit 3 Grundgrößen besteht. Zwischen dieser elektrostatischen Größeneinführung (mit ^{s} indizierte Formelzeichen) und ihrer Definition im Vierer-System (nicht-indizierte Formelzeichen) lassen sich einfache Verknüpfungsrelationen aufstellen, die als Proportionalitätsfaktoren lediglich Potenzen der elektrischen Feldkonstanten ε_0 enthalten. Mit ihrer Hilfe läßt sich das elektrostatische Dreier-System ohne weiteres in das Vierer-System überführen und umgekehrt.

Ehe wir diesen Schritt tun, wollen wir noch auf die rein geometrisch bedingte Alternative rational $\div$ nicht-rational zurückgreifen[11]). Das Vierer-System wird stets rational geschrieben, die Dreier-Systeme ursprünglich nicht-rational und später auch rational. Die im Abschnitt 2 eingeführten und durch nicht-indizierte Formelzeichen dargestellten elektrischen und magnetischen Größen sind also als rational definierte Größen zu betrachten. Wir können die geometrische Unterscheidung rational $\div$ nicht-rational für die elektrostatisch eingeführten (mit ^{s} indizierten) Größen in ihren physikalischen Verknüpfungsrelationen zu den entsprechenden (nicht-indizierten) Größen unseres Vierer-Systems gleich mit zum Ausdruck bringen. Hierzu haben wir nach der im Abschnitt 3a der voraufgegangenen Veröffentlichung[11]) entwickelten Methode der Variation der Größen die entsprechenden Potenzen der Zuordnungskoeffizienten χ, ν_e, ν_m, λ in die Proportionalitätsfaktoren dieser Verknüpfungsrelationen mit einzubeziehen.

Für eine Reihe elektrischer und magnetischer Größen sind die so resultierenden Verknüpfungsrelationen zwischen der rationalen bzw. nicht-rationalen elektrostatischen Größendefinition und der Vierer-Definition in der zweiten Spalte der Tabelle 2 zusammengestellt worden*). Für χ, ν_e, ν_m, λ sind je nach der gewünschten rationalen, teil- oder nicht-rationalen Größendefinition oder Gleichungenschreibung die in der Tabelle 3[11]) nochmals aufgeführten Werte einzusetzen.

Jetzt tragen wir die elektrostatischen Verknüpfungsrelationen der 2. Spalte unserer Tabelle 2 in die Gleichungen (1) bis (13) des Vierer-Systems ein. Dabei

*) Da die Dimensionsausdrücke für Kraft $\mathfrak{K}$, Energiedichte w und Energieströmungsdichte $\mathfrak{S}$ in den Dimensionssystemen $\mathsf{LMT}\varepsilon_0$ und $\mathsf{LMT}\mu_0$ (Tabelle 2) weder ε_0 noch μ_0 enthalten, können diese Größen als mechanische Größen bei der Aufstellung der Verknüpfungsrelationen außer Betracht bleiben.

Tabelle 2. Verknüpfungsrelationen zwischen elektrischen und magnetischen Größen in rationaler 4-Grundgrößen-Definition und rationaler oder nicht-rationaler 3-Grundgrößen-Definition

Rational definierte Vierer-Größe	Rational oder nicht-rational definierte Dreier-Größe			
	elektrostatisch definiert	elektromagnetisch definiert		symmetrisch definiert
U, φ . .	$U^s = U\sqrt{\chi\,\varepsilon_0}$	$U^m = U\sqrt{\chi/\mu_0}$	$= U^s\,c_0$	$U^g = U\sqrt{\chi\,\varepsilon_0}$
I	$I^s = I/\sqrt{\chi\,\varepsilon_0}$	$I^m = I/\sqrt{\chi/\mu_0}$	$= I^s\,c_0^{-1}$	$I^g = I/\sqrt{\chi\,\varepsilon_0}$
$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{G}^s = \mathfrak{G}/\sqrt{\chi\,\varepsilon_0}$	$\mathfrak{G}^m = \mathfrak{G}/\sqrt{\chi/\mu_0}$	$= \mathfrak{G}^s\,c^{-1}$	$\mathfrak{G}^g = \mathfrak{G}/\sqrt{\chi\,\varepsilon_0}$
$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}^s = \mathfrak{E}\sqrt{\chi\,\varepsilon_0}$	$\mathfrak{E}^m = \mathfrak{E}\sqrt{\chi/\mu_0}$	$= \mathfrak{E}^s\,c_0$	$\mathfrak{E}^g = \mathfrak{E}\sqrt{\chi\,\varepsilon_0}$
$\mathfrak{D}$ . . .	$\mathfrak{D}^s = \nu_e\cdot\mathfrak{D}/\sqrt{\chi\,\varepsilon_0}$	$\mathfrak{D}^m = \nu_e\cdot\mathfrak{D}/\sqrt{\chi/\mu_0}$	$= \mathfrak{D}^s\,c_0^{-1}$	$\mathfrak{D}^g = \nu_e\cdot\mathfrak{D}/\sqrt{\chi\,\varepsilon_0}$
$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{P}^s = \lambda\cdot\mathfrak{P}/\sqrt{\chi\,\varepsilon_0}$	$\mathfrak{P}^m = \lambda\cdot\mathfrak{P}/\sqrt{\chi/\mu_0}$	$= \mathfrak{P}^s\,c_0^{-1}$	$\mathfrak{P}^g = \lambda\cdot\mathfrak{P}/\sqrt{\chi\,\varepsilon_0}$
Q	$Q^s = Q/\sqrt{\chi\,\varepsilon_0}$	$Q^m = Q/\sqrt{\chi/\mu_0}$	$= Q^s\,c_0^{-1}$	$Q^g = Q/\sqrt{\chi\,\varepsilon_0}$
C	$C^s = C/\chi\,\varepsilon_0$	$C^m = C\cdot\mu_0/\chi$	$= C^s\,c_0^{-2}$	$C^g = C/\chi\,\varepsilon_0$
R	$R^s = R\cdot\chi\,\varepsilon_0$	$R^m = R\cdot\chi/\mu_0$	$= R^s\,c_0^2$	$R^g = R\cdot\chi\,\varepsilon_0$
$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{H}^s = \mathfrak{H}\sqrt{\chi/\varepsilon_0}$	$\mathfrak{H}^m = \mathfrak{H}\sqrt{\chi\,\mu_0}$	$= \mathfrak{H}^s\,c_0^{-1}$	$\mathfrak{H}^g = \mathfrak{H}\sqrt{\chi\,\mu_0}$
$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}^s = \nu_m\cdot\mathfrak{B}/\sqrt{\chi/\varepsilon_0}$	$\mathfrak{B}^m = \nu_m\cdot\mathfrak{B}/\sqrt{\chi\,\mu_0}$	$= \mathfrak{B}^s\,c_0$	$\mathfrak{B}^g = \nu_m\cdot\mathfrak{B}/\sqrt{\chi\,\mu_0}$
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}^s = \nu_m\cdot\mathfrak{A}/\sqrt{\chi/\varepsilon_0}$	$\mathfrak{A}^m = \nu_m\cdot\mathfrak{A}/\sqrt{\chi\,\mu_0}$	$= \mathfrak{A}^s\,c_0$	$\mathfrak{A}^g = \nu_m\cdot\mathfrak{A}/\sqrt{\chi\,\mu_0}$
$\mathfrak{M}$ . . .	$\mathfrak{M}^s = \lambda\cdot\mathfrak{M}/\sqrt{\chi/\varepsilon_0}$	$\mathfrak{M}^m = \lambda\cdot\mathfrak{M}/\sqrt{\chi\,\mu_0}$	$= \mathfrak{M}^s\,c_0$	$\mathfrak{M}^g = \lambda\cdot\mathfrak{M}/\sqrt{\chi\,\mu_0}$
p	$p^s = p/\sqrt{\chi/\varepsilon_0}$	$p^m = p/\sqrt{\chi\,\mu_0}$	$= p^s\,c_0$	$p^g = p/\sqrt{\chi\,\mu_0}$
Φ	$\Phi^s = \nu_m\cdot\Phi/\sqrt{\chi/\varepsilon_0}$	$\Phi^m = \nu_m\cdot\Phi/\sqrt{\chi\,\mu_0}$	$= \Phi^s\,c_0$	$\Phi^g = \nu_m\cdot\Phi/\sqrt{\chi\,\mu_0}$
L	$L^s = \nu_m\cdot L\cdot\varepsilon_0$	$L^m = \nu_m\cdot L/\mu_0$	$= L^s\,c_0^2$	$L^g = \nu_m\cdot L/\mu_0$

Tabelle 3. Werte der Zuordnungskoeffizienten χ, ν_e, ν_m, λ

	χ	ν_e	ν_m	λ
Teil-rational (nach Maxwell)	4π	1	4π	1
Teil-rational (nach Gauß)	4π	4π	4π	1
Nicht-rational (nach Schaefer)	4π	4π	4π	4π
Rational	1	1	1	1

haben wir die grundsätzliche Beziehung zu beachten, welche die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 mit den beiden Feldkonstanten ε_0 und μ_0 verknüpft

$$\varepsilon_0\,\mu_0\,c_0^2 = 1 \tag{15}$$

und erhalten die entsprechenden allgemeinen 3-Grundgrößen-Gleichungen des elektrostatischen Dreier-Systems *)

$$\oint \frac{\mathfrak{H}^s}{\chi}\cdot d\mathfrak{s} = \int \mathfrak{G}^s\cdot d\mathfrak{f} + \frac{d}{dt}\int \frac{\mathfrak{D}^s}{\nu_e}\cdot d\mathfrak{f} = \int \varkappa^s\,\mathfrak{E}^s\cdot d\mathfrak{f} + \frac{d}{dt}\int \varepsilon\,\frac{\mathfrak{E}^s}{\chi}\cdot d\mathfrak{f} \tag{1s}$$

$$\oint \frac{\mathfrak{E}^s}{\chi}\cdot d\mathfrak{s} = -\frac{d}{dt}\int \frac{\mathfrak{B}^s}{\nu_m}\cdot d\mathfrak{f} = -\frac{1}{c_0^2}\,\frac{d}{dt}\int \mu\,\frac{\mathfrak{H}^s}{\chi}\cdot d\mathfrak{f} \tag{2s}$$

*) Bezüglich der 3-Grundgrößen-Eigenschaft dieses Gleichungssystems siehe Fußnote *) auf S. 67.

$$\oint \frac{\mathfrak{D}^s}{\nu_e} \cdot d\mathfrak{f} = \Sigma Q^s \qquad (3\,s) \qquad\qquad \oint \frac{\mathfrak{B}^s}{\nu_m} \cdot d\mathfrak{f} = 0 \qquad (4\,s)$$

$$\frac{\mathfrak{D}^s}{\nu_e} = \varepsilon \frac{\mathfrak{E}^s}{\chi} = \frac{\mathfrak{E}^s}{\chi} + \frac{\mathfrak{P}^s}{\lambda} \qquad (5\,s) \qquad\qquad \frac{\mathfrak{B}^s}{\nu_m} = \frac{1}{c_0^2} \mu \frac{\mathfrak{H}^s}{\chi} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\mathfrak{H}^s}{\chi} + \frac{\mathfrak{M}^s}{\lambda} \qquad (6\,s)$$

$$w_e = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{E}^s \cdot \mathfrak{D}^s}{\nu_e} \quad (7\,s) \qquad w_m = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{H}^s \cdot \mathfrak{B}^s}{\nu_m} \quad (8\,s) \qquad \mathfrak{S} = \frac{1}{\chi} (\mathfrak{E}^s \times \mathfrak{H}^s) \quad (9\,s)$$

$$\mathfrak{K}_e = \frac{\chi Q_1^s Q_2^s}{4 \pi \varepsilon r^2} \mathfrak{r}^0 = Q^s \mathfrak{E}^s \quad (10\,s) \qquad\qquad \mathfrak{K}_m = c_0^2 \frac{\chi p_1^s p_2^s}{4 \pi \mu r^2} \mathfrak{r}^0 = p^s \mathfrak{H}^s \quad (11\,s)$$

$$\Delta \varphi^s = - \chi \frac{\eta^s}{\varepsilon} \qquad (12\,s) \qquad\qquad \Delta \mathfrak{A}^s = - \frac{\nu_m}{c_0^2} \mu \mathfrak{G}^s. \qquad (13\,s)$$

Setzt man beispielsweise für die Zuordnungskoeffizienten $\chi, \nu_e, \nu_m, \lambda$ die in der ersten Reihe der Tabelle 3 angegebenen Werte ein, so erhält man die Maxwellsche Schreibung der elektrostatischen Gleichungen.

Die elektrostatischen Gleichungen unterscheiden sich physikalisch von den entsprechenden des Vierer-Systems wesentlich dadurch, daß in den ersteren eine Größe, und zwar eine universelle Konstante, weniger auftritt als in den letzteren: Die Gleichungen des Vierer-Systems enthalten die beiden Feldkonstanten ε_0 und μ_0, während in den Gleichungen des elektrostatischen Dreier-Systems stattdessen explizit die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 erscheint. Wir werden diese Tatsache noch als ein ganz allgemeines Kennzeichen der Dreier-Systeme wiederfinden. In den elektrostatischen Gleichungen ist das „Verschwinden" der Feldkonstanten in der Art zu erklären, daß $\varepsilon_0 = 1$ und entsprechend Gleichung (15) $\mu_0 = 1/c^2$ geworden ist*).

Auf die elektrostatische Größendefinition und die elektrostatischen 3-Grundgrößen-Gleichungen sind Maßsysteme mit 3 Grundeinheiten abgestimmt, so z. B. das CGS-System, dessen zur Messung der elektrostatischen Größen dienende Einheiten wir als elektrostatischen Teil des CGS-Systems oder kurz als elektrostatische CGS-Einheiten bezeichnen wollen. Das CGS-System baut sich aus den drei Grundeinheiten cm, g, s auf. Man erhält die abgestimmten elektrostatischen CGS-Einheiten, indem man in den Dimensionsausdrücken des zugehörigen Dimensionssystems LMT für die elektrostatisch definierten elektrischen und magnetischen Größen L = cm, M = g und T = s setzt. Diese Dimensionsausdrücke gewinnen wir formal dadurch, daß wir von dem gerade erwähnten „Eins-Werden" der elektrostatischen Feldkonstanten Gebrauch machen und in den Dimensionsausdrücken des Systems $\mathsf{LMT}\varepsilon_0$ in der zweiten Spalte der Tabelle 1 das Dimensionssymbol ε_0 gleich Eins setzen.

Bislang hatten wir uns an das von uns Methode der Variation der Größen genannte Verfahren gehalten. D.h. wir hatten den Übergang vom elektro-

*) In einem neueren Aufsatz über „Physikalische Größen" unterscheidet Häberli[5]) zwischen physikalischen Größen und physikalischen Qualitäten. Nach seiner Auffassung und Darstellung „darf man physikalische Größen nicht «gleich Eins» setzen, sondern nur ihre Maßzahlen". Diese These ist jedoch nur solange berechtigt, wie man eine ganz bestimmte Art der Beschreibung der physikalischen Gesetzmäßigkeiten (z. B. der Elektrodynamik in einem 4-Grundgrößen-System) vorgibt und innehält, was Häberli übrigens auch in seiner Abhandlung tut.

statischen Dreier-System zum Vierer-System durch einen Wechsel in der Definition der Größen über die zugehörigen Verknüpfungsrelationen vorgenommen. Formell hätten wir auch auf einem ganz anderen Weg zu den elektrostatischen Gleichungen gelangen können: Man geht von den 4-Grundgrößen-Gleichungen zwischen den Größen des Vierer-Systems aus und trifft eine Festsetzung für den Zahlenwert der elektrischen Feldkonstanten

$$\varepsilon_0 = 1. \tag{16}$$

D. h. man gibt für die elektrischen und magnetischen Größen ein Einheitensystem vor, in dem die Einheit der absoluten Dielektrizitätskonstanten dimensionslos gleich Eins (Verfügung über die Art der Einheit) und der Zahlenwert der elektrischen Feldkonstanten oder absoluten Dielektrizitätskonstanten des Vakuums gleich Eins wird (Verfügung über den Betrag der Einheit). Die zu diesen Einheiten für die nicht-indizierten elektrischen und magnetischen Größen gehörigen Zahlenwertgleichungen stimmen formal mit den elektrostatischen 3-Grundgrößen-Gleichungen (1s) bis (13s) überein. Tragen wir die Festsetzung (16) für die elektrostatische Feldkonstante in die allgemeine Relation (15) ein, so resultiert als elektrostatische Verfügungsbedingung für den Zahlenwert der magnetischen Feldkonstanten

$$\mu_0 = 1/c_0^2. \tag{17}$$

c_0 bedeutet in der Gleichung (17) den Zahlenwert der Vakuumlichtgeschwindigkeit, gemessen in ihrer CGS-Einheit cm/s.

Um auch wieder die Alternative rational ÷ nicht-rational gleich mit einzubeziehen, setzen wir die Verfügungen (16) und (17) nicht in die Gleichungen (1) bis (13), sondern in die bereits mit den Zuordnungskoeffizienten allgemein geschriebenen Beziehungen (51) bis (63) der voraufgehenden Veröffentlichung [11]) ein. Wir gewinnen so die elektrostatischen Gleichungen als elektrostatische Zahlenwertgleichungen für die nicht-indizierten Größen wieder.

Dieses Verfahren der Entwicklung spezieller Zahlenwertgleichungen, welches wir hier für den physikalischen Übergang von Vierer-Gleichungen zu elektrostatischen Dreier-Gleichungen benutzten, hatten wir bereits in der voraufgegangenen Abhandlung auf den geometrischen Übergang rational $\rightleftarrows$ nicht-rational angewandt und Methode der Variation der Einheiten genannt.

b) Elektromagnetisches Dreier-System. Die elektromagnetisch eingeführten elektrischen und magnetischen Größen bilden gleichfalls einen Satz von Größen, zwischen denen ein Gleichungssystem mit 3 Grundgrößen besteht, unterscheiden sich jedoch dimensionsmäßig von den elektrostatisch definierten Größen.

Zunächst behandeln wir das Problem wieder nach der Methode der Variation der Größen. Wir heben die elektromagnetisch eingeführten Größen durch den Index ^{m} an ihren Formelzeichen hervor. Ihre Verknüpfung mit den entsprechenden (nicht-indizierten) Größen des Vierer-Systems verläuft ganz analog dem von uns im Abschnitt 3a auf die elektrostatischen Größen angewandten Verfahren. In den physikalischen Verknüpfungsrelationen zwischen den (nicht-indizierten) Vierer-Größen und den (mit ^{m} indizierten) elektromagnetischen Dreier-Größen treten nur Potenzen der magnetischen Feldkonstanten μ_0 als

Proportionalitätsfaktoren auf; diese Potenzen von μ_0 sind gerade reziprok zu den in den elektrostatischen Verknüpfungsrelationen (Abschnitt 3a) enthaltenen Potenzen von ε_0.

Nehmen wir die geometrische Alternative rational ÷ nicht-rational gleich wieder mit in diese physikalischen Verknüpfungsrelationen auf, so treten in ihre Proportionalitätsfaktoren zu den Potenzen von μ_0 noch Potenzen der Zuordnungskoeffizienten $\chi, \nu_e, \nu_m, \lambda$ ein; da das Rationalisierungsproblem für elektrostatisch oder elektromagnetisch eingeführte Größen das gleiche ist, sind für entsprechende elektrostatische oder elektromagnetische Größen die Potenzen der Zuordnungskoeffizienten in den Verknüpfungsrelationen identisch.

Diese allgemeinen Verknüpfungsrelationen, welche die physikalische und die geometrische Alternative umfassen, enthält die dritte Spalte der Tabelle 2 für einige elektrische und magnetische Größen. Führen wir diese Relationen in die Gleichungen (1) bis (13) des Vierer-Systems unter Benutzung der allgemeinen Beziehung (15) ein, so erhalten wir die entsprechenden allgemeinen 3-Grundgrößen-Gleichungen des elektromagnetischen Dreier-Systems*)

$$\oint \frac{\mathfrak{H}^m}{\chi} \cdot d\mathfrak{s} = \int \mathfrak{G}^m \cdot d\mathfrak{f} + \frac{d}{dt}\int \frac{\mathfrak{D}_m}{\nu_e} \cdot d\mathfrak{f} = \int \varkappa^m \mathfrak{E}^m \cdot d\mathfrak{f} + \frac{1}{c_0^2}\frac{d}{dt}\int \varepsilon \mathfrak{E}^m \cdot d\mathfrak{f} \quad (1\,\mathrm{m})$$

$$\oint \frac{\mathfrak{E}^m}{\chi} \cdot d\mathfrak{s} = -\frac{d}{dt}\int \frac{\mathfrak{B}^m}{\nu_m} \cdot d\mathfrak{f} = -\frac{d}{dt}\int \mu \frac{\mathfrak{H}^m}{\chi} \cdot d\mathfrak{f} \quad (2\,\mathrm{m})$$

$$\oint \frac{\mathfrak{D}_m}{\nu_e} \cdot d\mathfrak{f} = \Sigma\, Q^m \quad (3\,\mathrm{m}) \qquad \oint \frac{\mathfrak{B}^m}{\nu_m} \cdot d\mathfrak{f} = 0 \quad (4\,\mathrm{m})$$

$$\frac{\mathfrak{D}^m}{\nu_e} = \frac{1}{c_0^2}\,\varepsilon\,\frac{\mathfrak{E}^m}{\chi} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\mathfrak{E}^m}{\chi} + \frac{\mathfrak{P}^m}{\lambda} \quad (5\,\mathrm{m}) \qquad \frac{\mathfrak{B}^m}{\nu_m} = \mu\,\frac{\mathfrak{H}^m}{\chi} = \frac{\mathfrak{H}^m}{\chi} + \frac{\mathfrak{M}^m}{\lambda} \quad (6\,\mathrm{m})$$

$$w_e = \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{E}^m \cdot \mathfrak{D}^m}{\nu_e} \quad (7\,\mathrm{m}) \qquad w_m = \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{H}^m \cdot \mathfrak{B}^m}{\nu_m} \quad (8\,\mathrm{m}) \qquad \mathfrak{S} = \frac{1}{\chi}\,(\mathfrak{E}^m \times \mathfrak{H}^m) \quad (9\,\mathrm{m})$$

$$\mathfrak{K}_e = c_0^2\,\frac{\chi\, Q_1^m\, Q_2^m}{4\pi\varepsilon r^2}\,\mathfrak{r}^0 = Q^m\,\mathfrak{E}^m \quad (10\,\mathrm{m}) \qquad \mathfrak{K}_m = \frac{\chi\, p_1^m\, p_2^m}{4\pi\mu r^2}\,\mathfrak{r}^0 = p^m\,\mathfrak{H}^m \quad (11\,\mathrm{m})$$

$$\Delta\varphi^m = -c_0^2\,\chi\,\frac{\eta^m}{\varepsilon} \quad (12\,\mathrm{m}) \qquad \Delta\mathfrak{A}^m = -\nu_m\,\mu\,\mathfrak{G}^m. \quad (13\,\mathrm{m})$$

Bez. der den Zuordnungskoeffizienten zuzuordnenden Zahlenwerte gilt wieder das in Abschnitt 3a Gesagte. Beispielsweise erhält man mit den Werten der ersten Reihe der Tabelle 3 die Maxwellsche Schreibung der elektromagnetischen Gleichungen.

Die in den Gleichungen (1) bis (13) des Vierer-Systems explizit auftretenden Feldkonstanten ε_0 und μ_0 sind auch im elektromagnetischen Dreier-System verschwunden; stattdessen enthalten die Gleichungen (1m) bis (13m) wieder die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0. Allerdings ist die Stellung der in den elektrostatischen und elektromagnetischen Größengleichungen (1s) bis (13s) bzw. (1m)

*) Bezüglich der 3-Grundgrößen-Eigenschaft dieses Größengleichungssystems siehe Fußnote *) auf S. 67.

bis (13m) auftretenden Größe c_0^2 antisymmetrisch bez. der Gleichungen für das elektrische und das magnetische Feld. D. h. in dem elektromagnetischen Gleichungensatz ist $\mu_0 = 1$ und entsprechend der Beziehung (15) $\varepsilon_0 = 1/c_0^2$ geworden.

Auf die elektromagnetische Größendefinition und die elektromagnetischen 3-Grundgrößen-Gleichungen ist gleichfalls das CGS-System als ein Maßsystem mit 3 Grundeinheiten abgestimmt. Die CGS-Einheiten für die mit ^{m} indizierten elektrischen und magnetischen Größen sind allerdings andere als die CGS-Einheiten für die mit ^{s} indizierten Größen, da die elektromagnetischen und elektrostatischen Größen dimensionsverschieden sind. Die zur Messung der elektromagnetischen Größen passenden CGS-Einheiten nennen wir den elektromagnetischen Teil des CGS-Systems oder kurz die elektromagnetischen CGS-Einheiten. Wir erhalten sie durch Einsetzen von $\mathsf{L} =$ cm, $\mathsf{M} =$ g und $\mathsf{T} =$ s in die Dimensionsausdrücke des Dimensionssystems LMT für die elektromagnetisch definierten elektrischen und magnetischen Größen. Diese Dimensionsausdrücke gehen formal aus den entsprechenden des Systems $\mathsf{LMT}\mu_0$ für die Vierer-Größen in der dritten Spalte der Tabelle 1 hervor, wenn man in ihnen das Dimensionssymbol μ_0 gleich Eins setzt.

Den Zusammenhang zwischen elektromagnetisch und elektrostatisch eingeführten Größen haben wir in der dritten Spalte der Tabelle 2 mit aufgenommen. Er ergibt sich aus der zweiten und dritten Spalte unter Berücksichtigung der Gleichung (15) und enthält nur Potenzen der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0.

Die Methode der Variation der Einheiten liefert die zum rationalen 4-Grundgrößen-Gleichungssystem (1) bis (13) gehörigen rationalen oder nicht-rationalen elektromagnetischen Zahlenwertgleichungen, wenn man eine entsprechende Verfügung über die Einheiten trifft. Hierzu haben wir die Einheit der absoluten Permeabilität dimensionslos gleich Eins und den Zahlenwert der magnetischen Feldkonstanten oder absoluten Permeabilität des Vakuums gleich Eins zu setzen. Formelmäßig lauten diese elektromagnetischen Einheiten-Verfügungen für die Zahlenwerte der Feldkonstanten

$$\mu_0 = 1 \tag{18}$$

und in Verbindung mit der allgemeinen Beziehung (15)

$$\varepsilon_0 = 1/c_0^2. \tag{19}$$

Führen wir diese beiden Festsetzungen in die Gleichungen (51) bis (63) der voraufgegangenen Abhandlung[11]) ein, so erhalten wir wieder die allgemeinen elektromagnetischen Zahlenwertgleichungen.

c) Symmetrisches oder gemischtes Dreier-System. Wegen der Unsymmetrie in entsprechenden Gleichungen des elektrischen und magnetischen Feldes blieb die Darstellung der Elektrizität und des Magnetismus im elektrostatischen Dreier-System in ihrer praktischen Anwendung wesentlich auf die Behandlung der Gesetzmäßigkeiten des elektrischen Feldes beschränkt, im elektromagnetischen Dreier-System auf die des magnetischen Feldes. Zur durchgehenden Beschreibung des elektromagnetischen Feldes bedient man sich im allgemeinen der Gauß zugeschriebenen dritten Art von Dreier-Systemen, der sogenannten symmetrischen oder gemischten Gleichungenschreibung. Diese stellt eine geeignete Mischung der beiden bislang beschriebenen Dreier-Systeme insofern dar, als die in diesem gemischten Dreier-Größensatz zusammengefaßten

Größen in ihrem elektrischen Teil dem elektrostatisch eingeführten (Index ^{s}) und in ihrem magnetischen Teil dem elektromagnetisch eingeführten (Index ^{m}) Größensatz entnommen werden, wodurch eine vollkommene Symmetrisierung des zugehörigen Gleichungssystems erreicht wird. Auf die Tatsache, daß es sich in dieser Auffassung um ein drittes selbständiges 3-Grundgrößen-Gleichungssystem handelt, und seine Beziehungen zum Vierer-System hat vor einiger Zeit schon Emde[6]) hingewiesen.

Die Formelzeichen für die symmetrisch oder gemischt eingeführten elektrischen und magnetischen Größen indizieren wir mit ^{g}. Nach der Methode der Variation der Größen sind ihre Verknüpfungsrelationen zu den Vierer-Größen wieder unter Einbeziehung der geometrischen Alternative rational ÷ nichtrational in der vierten Spalte der Tabelle 2 zusammengestellt worden. Wir führen diese Verknüpfungsrelationen in die Gleichungen (1) bis (13) des Vierer-Systems unter Beachtung der Beziehung (15) ein und erhalten die allgemeinen 3-Grundgrößen-Gleichungen des symmetrischen Dreier-Systems*)

$$c_0 \oint \frac{\mathfrak{H}^g}{\chi} \cdot d\mathfrak{s} = \int \mathfrak{G}^g \cdot d\mathfrak{f} + \frac{d}{dt}\int \frac{\mathfrak{D}^g}{\nu_e} \cdot d\mathfrak{f} = \int \varkappa^g \mathfrak{E}^g \cdot d\mathfrak{f} + \frac{d}{dt}\int \varepsilon \frac{\mathfrak{E}^g}{\chi} \cdot d\mathfrak{f} \tag{1g}$$

$$c_0 \oint \frac{\mathfrak{E}^g}{\chi} \cdot d\mathfrak{s} = -\frac{d}{dt}\int \frac{\mathfrak{B}^g}{\nu_m} \cdot d\mathfrak{f} = -\frac{d}{dt}\int \mu \frac{\mathfrak{H}^g}{\chi} \cdot d\mathfrak{f} \tag{2g}$$

$$\oint \frac{\mathfrak{D}^g}{\nu_e} \cdot d\mathfrak{f} = \Sigma Q^g \quad (3\,\mathrm{g}) \qquad \oint \frac{\mathfrak{B}^g}{\nu_m} \cdot d\mathfrak{f} = 0 \quad (4\,\mathrm{g})$$

$$\frac{\mathfrak{D}^g}{\nu_e} = \varepsilon \frac{\mathfrak{E}^g}{\chi} = \frac{\mathfrak{E}^g}{\chi} + \frac{\mathfrak{P}^g}{\lambda} \quad (5\,\mathrm{g}) \qquad \frac{\mathfrak{B}^g}{\nu_m} = \mu \frac{\mathfrak{H}^g}{\chi} = \frac{\mathfrak{H}^g}{\chi} + \frac{\mathfrak{M}^g}{\lambda} \quad (6\,\mathrm{g})$$

$$w_e = \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{E}^g \cdot \mathfrak{D}^g}{\nu_e} \quad (7\,\mathrm{g}) \qquad w_m = \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{H}^g \cdot \mathfrak{B}^g}{\nu_m} \quad (8\,\mathrm{g}) \qquad \mathfrak{S} = \frac{c_0}{\chi}\,(\mathfrak{E}^g \times \mathfrak{H}^g) \quad (8\,\mathrm{g})$$

---

*) Daß die in diesem Abschnitt behandelten Dreier-Systeme tatsächlich Gleichungssysteme mit 3 Grundgrößen darstellen, läßt sich durch Abzählen der Gleichungen und der durch sie verknüpften unabhängigen Größen verifizieren [siehe Fußnote *) auf S. 58]. Wir führen diese Abzählung wieder an den Maxwellschen Gleichungen mit ihren Randbedingungen durch, und zwar am Beispiel des symmetrischen Dreier-Systems in der in der theoretischen Physik viel benutzten Gaußschen (teil-rationalen) Schreibung (Reihe 2 der Tabelle 3):

$c_0 \oint \mathfrak{H}^g \cdot d\mathfrak{s} = 4\pi \int \varkappa^g \mathfrak{E}^g \cdot d\mathfrak{f} + \frac{d}{dt}\int \varepsilon \mathfrak{E}^g \cdot d\mathfrak{f}$	$l,\ t,\ \mathfrak{H}^g,\ \mathfrak{E}^g,\ \varkappa^g,\ c_0$
$c_0 \oint \mathfrak{E}^g \cdot d\mathfrak{s} = -\frac{d}{dt}\int \mu \mathfrak{H}^g \cdot d\mathfrak{f}$	—
$\oint \varepsilon \mathfrak{E}^g \cdot d\mathfrak{f} = \Sigma Q^g$	Q^g
$\oint \mu \mathfrak{H}^g \cdot d\mathfrak{f} = 0$	—
4 Gleichungen	zwischen 7 Größen

D. h. das Gleichungssystem ist ein Gleichungssystem mit 3 Grundgrößen.

$$\mathfrak{K}_e = \frac{\chi Q_1^g Q_2^g}{4\pi\varepsilon r^2}\,\mathfrak{r}^0 = Q^g\,\mathfrak{E}^g \qquad (10\,\mathrm{g}) \qquad\qquad \mathfrak{K}_m = \frac{\chi p_1^g p_2^g}{4\pi\mu r^2}\,\mathfrak{r}^0 = p^g\,\mathfrak{H}^g \qquad (11\,\mathrm{g})$$

$$\Delta\varphi^g = -\chi\frac{\eta^g}{\varepsilon} \qquad (12\,\mathrm{g}) \qquad\qquad \Delta\mathfrak{A}^g = -\frac{\nu_m}{c_0}\mu\,\mathfrak{G}^g. \qquad (13\,\mathrm{g})$$

Setzt man beispielsweise hier für χ, ν_e, ν_m, λ die Zahlenwerte der zweiten Reihe der Tabelle 3 ein, so erhält man die in der theoretischen Physik heute bevorzugte Gaußsche Schreibung der symmetrischen Gleichungen.

Die für das Vierer-System charakteristischen Feldkonstanten ε_0 und μ_0 sind auch aus dem Gleichungensatz des symmetrischen Dreier-Systems verschwunden. Stattdessen tritt die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 explizit auf, allerdings nur in der ersten Potenz und an ganz anderen Stellen als im elektrostatischen und elektromagnetischen Gleichungssystem. Während dort c_0^2 jeweils in den Gleichungen des magnetischen bzw. elektrischen Feldes erscheint, enthalten hier alle Verknüpfungsgleichungen zwischen elektrischen und magnetischen Größen c_0. Dieser Sachverhalt ist folgendermaßen zu interpretieren: Da wir die Definition der elektrischen Größen aus dem elektrostatischen Größensatz und die der magnetischen Größen aus dem elektromagnetischen Größensatz übernommen haben, werden gleichzeitig ε_0 und μ_0 gleich Eins. Hierin liegt eine Überbestimmung des Überganges von einem 4-Grundgrößen-System zu einem 3-Grundgrößen-System, welche durch das Auftreten von c_0 als Ausgleichsgröße zur dimensionellen und betragsmäßigen Richtigstellung des Gleichungssystems ausgeglichen wird[13]).

Auf die symmetrische Größendefinition und die symmetrischen 3-Grundgrößen-Gleichungen ist der symmetrische Teil des CGS-Systems abgestimmt, der sich aus den elektrostatischen CGS-Einheiten für die elektrischen Größen und den elektromagnetischen CGS-Einheiten für die magnetischen Größen zusammensetzt. Man nennt dieses Einheitensystems das Gaußsche System oder auch die symmetrischen CGS-Einheiten.

Die Methode der Variation der Einheiten versagt in diesem Fall. Um zu symmetrischen Zahlenwertgleichungen zu gelangen, hätten wir in dem Vierer-System (1) bis (13) die beiden Verfügungen für die Zahlenwerte der Feldkonstanten

$$\varepsilon_0 = 1 \quad (16) \qquad \text{und} \qquad \mu_0 = 1 \qquad (18)$$

zu treffen. Dabei würden wir überall dort richtige Zahlenwertgleichungen erhalten, wo Gesetzmäßigkeiten zwischen elektrischen Größen oder zwischen magnetischen Größen dargestellt werden, z. B. bei den Gleichungen (3) bis (8) und (10) bis (12). Dagegen führt dieses Verfahren bei allen Beziehungen, durch welche elektrische und magnetische Größen verknüpft werden, wie z. B. in den Gleichungen (1) und (2) oder (9) und (13), nicht zum Ziel, da dort zwar formal die Feldkonstanten verschwinden, der erforderliche Ausgleichsfaktor aber nicht von selbst auftritt.

Der Grund hierfür ist einfach der, daß man zu Zahlenwertgleichungen, welche passend zu einem Dreier-System geschrieben sein sollen, durch gleichzeitige Verfügung über zwei Einheiten und Zahlenwerte nur gelangen kann, wenn man von einem Fünfer-System, d. h. einem Gleichungssystem mit 5 Grundgrößen ausgeht.

4. Fünfer-System

Als fünfte Grundgröße erscheint neben den drei mechanischen Grundgrößen Länge, Masse, Zeit und der vierten elektrischen Grundgröße Ladung Q die magnetische Polstärke p bzw. der magnetische Kraftfluß Φ zweckmäßig. Die Dimensionsausdrücke, bezogen auf ein solches Fünfer-System, beispielsweise die Dimensionssysteme $\mathsf{LMTQ}\Phi$ oder $\mathsf{LMT}\varepsilon_0\mu_0$, brauchen wir nicht noch einmal gesondert hinzuschreiben; sie sind bereits in der Tabelle 1 enthalten, da die Systeme $\mathsf{LMT}\varepsilon_0\mu_0$ und $\mathsf{LMTQ}\Phi$ jeweils in zwei Vierer-Systeme aufspalten: das System $\mathsf{LMTQ}\Phi$ in das System LMTQ (vierte Spalte der Tabelle 1) für die Dimensionsausdrücke der elektrischen Größen und in das System $\mathsf{LMT}\Phi$ (fünfte Spalte der Tabelle 1) für die der magnetischen Größen, entsprechend das System $\mathsf{LMT}\varepsilon_0\mu_0$ in das System $\mathsf{LMT}\varepsilon_0$ (zweite Spalte der Tabelle 1) für die Dimensionen der elektrischen Größen und in das System $\mathsf{LMT}\mu_0$ (dritte Spalte der Tabelle 1) für die Dimensionen der magnetischen Größen. Das Fünfer-System führt also zu einer vollständigen Symmetrie zwischen den elektrischen und magnetischen Größen.

Somit bleiben die Gleichungen, welche nur zwischen elektrischen oder nur zwischen magnetischen Größen bestehen, auch für das Fünfer-System in der Form des Vierer-Systems erhalten. Lediglich in die Gleichungen, welche Beziehungen zwischen elektrischen und magnetischen Größen ausdrücken, muß jeweils eine dimensionsbehaftete Größe eingehen, welche für eine dimensionsrichtige Verknüpfung der jetzt unabhängig voneinander definierten elektrischen und magnetischen Größen sorgt. Der symmetrische Aufbau des ganzen Fünfer-Systems bez. der elektrischen und magnetischen Größen, d. h. seine Aufspaltbarkeit in je einen elektrischen und einen magnetischen Teil gleicher Symmetrieeigenschaften, bewirkt, daß diese neue dimensionsbehaftete Größe in allen Verknüpfungsgleichungen zwischen elektrischen und magnetischen Größen stets dieselbe ist. Sie wird von Cohn[7]) mit V, von Sommerfeld zunächst gleichfalls mit V[2]), später mit Γ[3]), von Fischer[8]), Hund[1]) und Fleischmann[9]) mit γ bezeichnet; wir wählen γ*).

Die physikalische Interpretation, die man γ allgemein geben könnte, soll hier nicht im einzelnen diskutiert werden[10]). Es sei nur darauf hingewiesen, daß sie beispielsweise im Durchflutungsgesetz

$$\gamma \oint \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{s} = \Sigma I \tag{19}$$

die Rolle der skalaren Größe a in der Ausdrucksweise der entsprechenden allgemeinen Gleichung (14a) aus der voraufgegangenen Veröffentlichung[11]) spielt und den Proportionalitätsfaktor zwischen elektrischem Strom und seiner magnetischen Randspannung darstellt**). Die Größe γ betrachten wir hier als

*) Sommerfeld definiert die magnetische Polstärke als eine von der hier benutzten Polstärke dimensionsverschiedene Größe [p^* (Sommerfeld) $= p/\mu\,\mu_0$; siehe Fußnote *) auf S. 60]. In dem Sommerfeldschen Dimensionssystem $LMTQP^*$ hat die von ihm eingeführte Größe Γ die Dimension $LT^{-1}QP^{*-1}$, während unsere Größe γ, welche entsprechend auf ein Dimensionssystem $LMTQP$[P^* (Sommerfeld) $= L^3MT^{-2}P^{-1}$] zu beziehen wäre, in diesem die Dimension $L^{-2}M^{-1}TQP$ erhält.

**) Die charakteristische Größe γ erhält auch eine atomphysikalisch sinnfällige Deutung; γ ergibt sich beispielsweise als verknüpfende Größe zwischen dem als magnetische Größe eingeführten Bohrschen Magneton μ_B und dem nur elektrische und mechanische Elemente enthaltenden Produkt aus „klassischem" Elektronenradius r_0 und h/e: $\gamma = \mu_B/r_0(h/e)$[12]).

einen Ausdruck für die Tatsache, daß im Fünfer-System neben der elektrischen Grundgröße eine eigene magnetische Grundgröße vorhanden ist und daß die magnetischen Größen nicht (wie im Vierer-System) direkt per definitionem auf die elektrischen Größen zurückgeführt werden, sondern mit diesen über die dimensionsbehaftete Größe γ verknüpft sind. Selbstverständlich kann man auch analog Tabelle 2 Verknüpfungsrelationen zwischen den in den verschiedenen Dreier-Systemen, im Vierer-System und im Fünfer-System definierten Größen aufstellen; die Proportionalitätsfaktoren dieser Beziehungen enthalten dann außer ε_0 und μ_0 noch die dimensionsbehaftete Größe γ.

Zwischen der Größe γ und den drei Vakuumkonstanten ε_0, μ_0, c_0 besteht die allgemeine Beziehung

$$\varepsilon_0 \mu_0 c_0^2 = \gamma^2, \tag{20}$$

als deren Spezialfall für $\gamma = 1$ die entsprechende Gleichung (15) im Vierer-System anzusehen ist. Im Dimensionssystem $\mathsf{LMT}\,\varepsilon_0\,\mu_0$ besitzt γ die Dimension, $\mathsf{LT}^{-1}\,\varepsilon_0^{1/2}\mu_0^{1/2}$, im Dimensionssystem $\mathsf{LMTQ}\,\Phi$ die Dimension $\mathsf{L}^{-2}\mathsf{M}^{-1}\mathsf{TQ}\,\Phi$.

Die Formelzeichen der elektrischen und magnetischen Größen wollen wir in ihrer Einführung für ein Fünfer-System nicht besonders indizieren. Wenn wir die geometrische Alternative rational ÷ nicht-rational auch hier wieder gleich mit berücksichtigen, lauten die schon in verschiedenen Größenvarianten formulierten Gesetzmäßigkeiten (1) bis (13), dargestellt in unserem Fünfer-System*)

$$\gamma \oint \frac{\mathfrak{H}}{\chi} \cdot d\mathfrak{s} = \int \mathfrak{G} \cdot d\mathfrak{f} + \frac{d}{dt}\int \frac{\mathfrak{D}}{\nu_e} \cdot d\mathfrak{f} = \int \varkappa \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \varepsilon \frac{\mathfrak{E}}{\chi} \cdot d\mathfrak{f} \tag{1'}$$

$$\gamma \oint \frac{\mathfrak{E}}{\chi} \cdot d\mathfrak{s} = -\frac{d}{dt}\int \frac{\mathfrak{B}}{\nu_m} \cdot d\mathfrak{f} = -\mu_0 \frac{d}{dt}\int \mu \frac{\mathfrak{H}}{\chi} \cdot d\mathfrak{f} \tag{2'}$$

$$\oint \frac{\mathfrak{D}}{\nu_e} \cdot d\mathfrak{f} = \Sigma Q \tag{3'}$$

$$\oint \frac{\mathfrak{B}}{\nu_m} \cdot d\mathfrak{f} = 0 \tag{4'}$$

*) Die algebraische Abzählung der Gleichungen und unabhängigen Größen gestaltet sich für das Fünfer-System in rationaler Darstellung folgendermaßen [siehe Fußnote *) auf S. 58]:

$\gamma \oint \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{s} = \int \varkappa \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int \varepsilon \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f}$	l, t, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}$, $\varkappa$, ε_0, γ
$\gamma \oint \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{s} = -\mu_0 \frac{d}{dt}\int \mu \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{f}$	μ_0
$\varepsilon_0 \oint \varepsilon \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f} = \Sigma Q$	Q^*
$\mu_0 \oint \mu \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{f} = 0$	—
4 Gleichungen zwischen	9 Größen

D. h. das Gleichungssystem ist ein Gleichungssystem mit 5 Grundgrößen.

$$\frac{\mathfrak{D}}{\nu_e} = \varepsilon\,\varepsilon_0\,\frac{\mathfrak{E}}{\chi} = \varepsilon_0\,\frac{\mathfrak{E}}{\chi} + \frac{\mathfrak{P}}{\lambda} \quad (5') \qquad \frac{\mathfrak{B}}{\nu_m} = \mu\,\mu_0\,\mathfrak{H} = \mu_0\,\frac{\mathfrak{H}}{\chi} + \frac{\mathfrak{M}}{\lambda} \quad (6')$$

$$w_e = \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D}}{\nu_e} \quad (7') \qquad w_m = \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{B}}{\nu_m} \quad (8') \qquad \mathfrak{S} = \frac{\gamma}{\chi}\,(\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}) \quad (9')$$

$$\mathfrak{K}_e = \frac{\chi\,Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon\,\varepsilon_0\,r^2}\,\mathfrak{r}^0 = Q\,\mathfrak{E} \quad (10') \qquad \mathfrak{K}_m = \frac{\chi\,p_1\,p_2}{4\,\pi\,\mu\,\mu_0\,r^2}\,\mathfrak{r}^0 = p\,\mathfrak{H} \quad (11')$$

$$\Delta\,\varphi = -\,\chi\,\frac{\eta}{\varepsilon\,\varepsilon_0} \quad (12') \qquad \Delta\,\mathfrak{A} = -\,\frac{\nu_m}{\gamma}\,\mu\,\mu_0\,\mathfrak{G}. \quad (13')$$

Man sieht sofort, daß die Gleichungen des Fünfer-Systems eine Größe mehr enthalten als die des Vierer-Systems: Außer den Feldkonstanten ε_0 und μ_0 tritt explizit noch die Größe γ auf.

Als abgestimmte Einheitensysteme passen zu diesem Fünfer-System Maßsysteme mit 5 Grundeinheiten, welche allerdings praktisch bislang noch nicht entwickelt worden sind.

Wir können dieses 5-Grundgrößen-Gleichungssystem wieder nach der Methode der Variation der Einheiten durch Vorgabe bestimmter Einheitensysteme in die zu diesen passenden Zahlenwertgleichungen abwandeln; d. h. wir betrachten ε_0, μ_0 und γ als Systemkonstanten und treffen über ihre Einheiten und Zahlenwerte (Art und Betrag der Einheiten) entsprechende Verfügungen. Festsetzungen für eine dieser drei Größen führen zu einer Gleichungsschreibung, welche formal mit dem Vierer-System übereinstimmt und die Benutzung von Einheitensystemen mit 4 Grundeinheiten gestattet; Verfügungen über zwei dieser drei Größen ergeben die verschiedenen Zahlenwertgleichungen in der Schreibweise der Dreier-Systeme und lassen die Verwendung von Einheitensystemen mit 3 Grundeinheiten zu. Die hierzu erforderlichen Festsetzungen stellen wir in der Tabelle 4 zusammen. Die jeweils Einheiten-erzeugenden und

Tabelle 4. Festsetzungen für ε_0, μ_0, γ zum Übergang vom Fünfer-System zu den verschiedenen Zahlenwertgleichungen in Vierer- und Dreier-Schreibweise

Wert der Größe	Zahlenwertgleichungen im			
	Vierer-System	Dreier-System		
		elektrostatische	elektromagnetische	symmetrische
$\varepsilon_0 =$	ε_0	**1**	$1/c_0^2$	**1**
$\mu_0 =$	μ_0	$1/c_0^2$	**1**	**1**
$\gamma =$	**1**	**1**	**1**	c_0

die Systemzahl erniedrigenden Verfügungen sind in der Tabelle durch Fettdruck hervorgehoben worden; die übrigen Zahlenwerte ergeben sich unter Beachtung der Relation (20).

Die Festsetzungen der Tabelle 4 sind von der geometrischen Alternative rational ÷ nicht-rational unabhängig. Der Gleichungensatz (1′) bis (13′) umschließt durch den Einbau der Zuordnungskoeffizienten χ, ν_e, ν_m, λ in die Gleichungen allerdings auch diese Alternative. Man erhält die jeweils gewünschte rationale, teil- oder nicht-rationale Schreibweise der Zahlenwertgleichungen, bezogen auf ein Fünfer-, Vierer- oder Dreier-Einheitensystem, durch entsprechende Verfügung über die Koeffizienten χ, ν_e, ν_m, λ. Für vier praktisch wichtige Fälle sind diese Zahlenwerte bereits in der Tabelle 3 angegeben worden. An Hand der Tabellen 3 und 4 können also alle interessierenden Zahlenwertgleichungsschreibweisen hinsichtlich der geometrischen Alternative rational ÷ nicht-rational und der physikalischen Unterscheidung von Fünfer-, Vierer- und Dreier-Systemen aus dem allgemeinen Fünfer-Gleichungensatz (1′) bis (13′) abgeleitet werden.

5. Beziehungen zwischen Einheiten und Zahlenwerten

Die in den voraufgehenden Abschnitten dargelegten Betrachtungen zeigen — und das ist das eigentliche Anliegen dieser Veröffentlichung —, daß die verschiedenartige Darstellung der Elektrodynamik eine Frage der physikalischen Auffassung und physikalischen Definition der beschreibenden Größen und primär unabhängig von der speziellen Wahl dieser oder jener Einheiten ist. Wenn man sich für eine bestimmte Art der Behandlung und Größendefinition entschieden hat, entsteht erst sekundär die Aufgabe, auf diese abgestimmte Einheiten auszuwählen.

Sofern man unter den in den Abschnitten 2 bis 4 behandelten Gleichungensätzen 3-, 4- oder 5-Grundgrößen-Gleichungen für in bestimmter Form eingeführte elektrische und magnetische Größen versteht, ist die Frage nach den jeweils zu diesen passenden Einheiten sehr einfach zu beantworten: Zu jedem Gleichungensatz passen als abgestimmte Einheitensysteme jeweils Maßsysteme mit einer gleichen Zahl von Grundeinheiten, wie der betrachtete Gleichungensatz Grundgrößen besitzt, also für das Fünfer-System Maßsysteme mit 5 Grundeinheiten, für das Vierer-System Maßsysteme mit 4 und für Dreier-Systeme solche mit 3 Grundeinheiten. Diese Feststellung gilt dabei unabhängig davon, ob man im Einzelfall eine rationale, teil- oder nicht-rationale Größendefinition im Auge hat. Wie wir in der voraufgehenden Veröffentlichung[11]) auseinandergesetzt haben, ist in dieser Art der Auffassung und Behandlung des Problems auch der geometrische Unterschied rational ÷ nicht-rational in die Größendefinition gelegt worden; bei einer bestimmten physikalischen Festlegung auf ein Fünfer-, Vierer- oder Dreier-System sind daher die Einheiten für rationale und nicht-rationale Definition art- und betragsgleich. Diese Konsequenz ist besonders für die Dreier-Systeme wichtig: Die abgestimmten elektrostatischen, elektromagnetischen und symmetrischen CGS-Einheiten sind ihrem Betrage nach unabhängig davon, ob jeweils die elektrostatische, elektromagnetische oder symmetrische Größendefinition rational oder nicht-rational eingeführt ist, sie werden als reine Potenzprodukte aus cm, g und s gegeben.

Anders liegt der Fall jedoch, wenn man die elektrostatischen, elektromagnetischen oder symmetrischen Gleichungensätze als in dieser Form geschriebene Zahlenwertgleichungen ansieht, welche durch entsprechende Verfügungen (Tabelle 4) aus einem 5- oder 4-Grundgrößen-Gleichungssystem hervorgegangen sind. Auch dann ist die Art der zugehörigen Einheiten eindeutig vorgegeben. Dagegen hängt der Betrag noch davon ab, ob das Ausgangs-4- oder -5-Grundgrößen-Gleichungssystem rational oder nicht-rational definiert und die betrachteten Zahlenwertgleichungen rational oder nicht-rational geschrieben sind.

Diese Frage wurde bereits im Abschnitt 3 der voraufgehenden Arbeit *diskutiert*. Praktisch wichtig ist der Fall, daß man von dem heute meist benutzten rational definierten 4-Grundgrößen-Gleichungssystem zu Zahlenwertgleichungen in einer rationalen oder nicht-rationalen Dreier-Schreibweise übergeht. Sofern diese Zahlenwertgleichungen rational (vierte Reihe der Tabelle 3) geschrieben werden, sind die zugehörigen Einheiten wieder mit den obengenannten elektrostatischen, elektromagnetischen oder symmetrischen CGS-Einheiten identisch. Schreibt man jedoch die Zahlenwertgleichungen nicht-rational (erste bis dritte Reihe der Tabelle 3), so unterscheiden sich die zugehörigen Einheiten um Potenzen der jeweils gleich 4π zu setzenden Zuordnungskoeffizienten von den entsprechenden CGS-Einheiten. Diese Potenzen des Faktors 4π werden für die Einheiten der einzelnen Größen gerade durch diejenigen Potenzen der Zuordnungsfaktoren bedingt, welche in die Proportionalitätsfaktoren der Verknüpfungsrelationen für die betreffende Größe in der Tabelle 2 mit aufgenommen wurden. Die Konsequenzen dieser Tatsache für die Rückführung unserer heutigen rationalen elektrischen Vierer-Maßsysteme auf die nicht-rationalen elektromagnetischen Einheiten wurden schon in anderem Zusammenhang in einer anderen Veröffentlichung[13]) im einzelnen behandelt und auch zahlenmäßig entwickelt.

Wir wollen noch auf einen anderen Punkt hinweisen. Ebenso wie eine elektrische oder magnetische Größe in ihrer Dreier-, Vierer- oder Fünfer-Systems-Einführung jeweils eine andere Dimension besitzt, sind auch die zugehörigen Einheiten eines Dreier-, Vierer- oder Fünfer-Systems dimensionsverschieden. Man kann daher auch nicht die Einheit aus einem 4-Grundeinheiten-System für eine Größe mit der entsprechenden CGS-Einheit durch einen unbenannten Zahlenfaktor über ein „Gleichheits"-Zeichen verbinden; dasselbe gilt beispielsweise für den gegenseitigen Bezug der elektrostatischen und elektromagnetischen CGS-Einheit für eine Größe. In solchen Einheitenrelationen sollte man das „entspricht"-Zeichen verwenden[14]).

Unter diesen Umständen ergeben sich sachliche wie formale Schwierigkeiten bei der Aufstellung von Umrechnungsbeziehungen zwischen elektrischen Einheiten aus verschiedenen Einheitensystemen. Diese vermeidet man, wenn man an Stelle der Einheiten die in ihnen gemessenen Zahlenwerte umrechnet. Da Zahlenwerte definitionsgemäß dimensionslos sind, lassen sich zwischen ihnen in jedem Falle Umrechnungsfaktoren in einwandfreier Gleichungenschreibung ermitteln und angeben. Die Bevorzugung der Umrechnungsfaktoren für Zahlenwerte wird außerdem auch dadurch nahegelegt, daß gerade die Zahlenwerte die tatsächlichen Meßergebnisse darstellen. Und schließlich läuft das Bedürfnis der Praxis in der gleichen Richtung: In den seltensten Fällen wird sich der Praktiker dafür interessieren, welche Relation zwischen zwei Einheiten für eine Größe besteht; vielmehr will er im allgemeinen wissen, wie sich die Zahlenwerte der von ihm gesuchten Größe, gemessen in zwei verschiedenen Einheiten, zueinander verhalten.

Abschließend wollen wir noch eine Bemerkung zu der Frage, welche der verschiedenen Auffassungen für die Zukunft zweckmäßig erscheint, anknüpfen. Das Problem rationale oder nicht-rationale Größendefinition ist rein geometrischer Natur und, physikalisch gesehen, von untergeordneter Bedeutung.

Die Zweckmäßigkeit des äußeren Formelaufbaus spricht für die rationale Behandlung, wie sie sich heute bereits in der Mehrzahl der Länder durchgesetzt hat. Unter den physikalisch verschiedenen Darstellungen ist dem 5-Grundgrößen-System der Vorzug zu geben. Einmal stehen im Fünfer-System die magnetischen Größen gleichberechtigt und definitionsmäßig unabhängig neben den elektrischen Größen. Zum anderen erhält man im Fünfer-System eine vollkommen symmetrische Darstellung des Sechser-Vektors in der vierdimensionalen Elektrodynamik[9]). Weiter läßt sich in dieser Behandlung der gewöhnliche oder Pseudo-Charakter von Vektoren und Skalaren klar und eindeutig zuordnen[10]). Und schließlich gestattet das Fünfer-System als übergeordnetes Größensystem den Übergang zu den Vierer- und Dreier-Systemen, die als reduzierte Spezialfälle aus dem Fünfer-System in einfacher und durchsichtiger Weise abzuleiten sind. Vom allgemeinen physikalischen Standpunkt aus ist also heute das Gleichungssystem (1′) bis (13′) mit dem Zahlenwert 1 für die geometrischen Zuordnungskoeffizienten χ, ν_e, ν_m, λ als das zweckmäßigste zu bezeichnen. Einer allgemeinen Einführung dieses Systems auch in der Technik steht allerdings noch die Tatsache entgegen, daß es bislang kein spezifisch magnetisches Grundmeßverfahren von allgemeiner praktischer Bedeutung gibt*). Somit wird man meßtechnisch die magnetischen Größen weiter auf die elektrischen Größen zurückführen und daher zunächst auch wohl bei der formelmäßigen Darstellung des rationalen Vierer-Systems — Gleichungen (1) bis (13) — bleiben **).

Zusammenfassung

Die Gesetzmäßigkeiten des elektromagnetischen Feldes werden in Gleichungssystemen mit 3, 4 und 5 Grundgrößen dargestellt. Bei den Gleichungssystemen mit 3 Grundgrößen werden die verschiedenen Behandlungsarten mit elektrostatischer, elektromagnetischer und symmetrischer Größeneinführung im einzelnen diskutiert und die Verknüpfungsrelationen zwischen diesen drei Größenarten und den entsprechenden Größen des Vierer-Systems entwickelt und zusammengestellt. Dabei wird die in der voraufgehenden Veröffentlichung behandelte rein geometrisch bedingte Alternative rational $\div$ nicht-rational in diese Beziehungen mit eingearbeitet. Die Übergänge von einem System zum anderen lassen sich nach der Methode der Variation der Größen und der Variation der Einheiten durchführen; die zweite Methode versagt beim Übergang vom Vierer-System auf das symmetrische Dreier-System. Für das Fünfer-System werden allgemeine Gleichungen angegeben, aus denen durch bestimmte physikalische Verfügungen über die Feldkonstanten ε_0 und μ_0 und die Größe $\gamma = c_0 \sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}$ nach Einheit und Zahlenwert entsprechende Zahlenwertgleichungen in Vierer- und Dreier-Schreibweise hervorgehen. Bei gleichzeitiger

*) Ob sich die Rabische Methode zur Bestimmung von Magnetfeldern mit dem Kernmagneton als magnetischer Grundeinheit[12]) ausbauen und allgemein anwenden läßt, bleibt abzuwarten.

**) Es sei noch bemerkt, daß das Thema der Gleichungsschreibweise, Größendefinition und Einheitenfestlegung in der Elektrodynamik in letzter Zeit wieder Gegenstand zahlreicher Diskussionen und Veröffentlichungen in der in- und ausländischen Literatur wurde und noch ist — siehe außer den bereits zitierten Stellen z. B. [15]).

Verfügung über die *geometrischen Zuordnungskoeffizienten sind aus diesem* Fünfer-System alle gewünschten rationalen oder nicht-rationalen Fünfer-, Vierer- und Dreier-Gleichungsschreibweisen zu gewinnen. Abschließend werden einige Folgerungen für die Beziehungen zwischen Einheiten und Zahlenwerten der elektrischen und magnetischen Größen gezogen.

Literatur

1) F. Hund, Phys. Z. **39**, 376, 1938.
2) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. (5) **36**, 335, 1939.
3) A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Band III, Wiesbaden 1948, S. 48.
4) W. Döring, Ann. d. Phys. (6) 1949, im Druck.
5) F. Häberli, Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. **13**, 65, 113, 136, 1947.
6) F. Emde, Z. phys. chem. Unterr. **53**, 65, 1940.
7) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, 1. Auflage, Leipzig 1900, S. 280.
8) J. Fischer, Z. Phys. **100**, 360, 1936.
9) R. Fleischmann, Z. Naturforschg. **3a**, 492, 1948.
10) R. Fleischmann, private Mitteilung, erscheint demnächst.
11) U. Stille, Abh. Braunschw. Wiss. Ges. Bd. I, Heft 1, 1949, S. 38.
12) U. Stille, Ann. d. Phys. (6) 1949, im Druck.
13) U. Stille, Arch. Elektrotechn. **39**, 130, 1948.
14) R. W. Pohl u. F. Stöckmann, Z. Phys. **122**, 680, 1944.
15) AEF, Normblätter DIN 1324, 1325, 1339, Berlin 1946; E. Boedea, Bull. ASE **38**, 222, 1947; Giorgisches MKS-Maß-System mit Dimensionskohärenz, Basel 1949; L. Bouthillon, C. R. **222**, 871, 1946; E. Brylinski, Rev. Gén. Électr. **52**, 121, 1943; **57**, 82, 200, 1948; C. R. **216**, 113, 266, 1943; **226**, 68, 1948; C. Budeanu, Bull. Soc. Franç. Électr. (6) **7**, 563, 1947; N. R. Campbell u. L. Hartshorn, Proc. Phys. Soc. London **58**, 634, 1946; **60**, 27, 1948; P. Cornelius, Phil. Techn. Rdsch. **10**, 79, 1948; Phil. Res. Rep. **4**, 232, 1949; Korte Samenvating der electriciteitsleer, Amsterdam 1948; P. Cornelius u. H. C. Hamaker, Phil. Res. Rep. **4**, 123, 1949; H. Diesselhorst, Ann. d. Phys. (6) **3**, 11, 1948; J. A. Eldridge, Phys. Rev. (2) **73**, 1229, 1948; J. Fischer, Arch. Elektrotechn. **39**, 340, 1949; L. Flamm, Österr. Ing. Arch. **1**, 105, 1946; P. Fleury, J. Phys. Radium (8) **9**, 33, 1948; P. Grivet, Bull. Soc. Franç. Électr. (6) **7**, 594, 1947; W. de Groot, Phil. Techn. Rdsch. **10**, 54, 1948; E. Hallén, Trans. Roy. Inst. Techn. Stockholm No. 6, 1947; G. W. O. Howe, Wireless Engr. **23**, 207, 1946; E. Ingelstam, Elementa, September-Heft 1948; L. Kneissler, E. u. M. **63**, 82, 1946; W. Kossel, Zur Darstellung der Elektrizitätslehre, Mosbach-Baden 1949; Schweizerischer Elektrotechnischer Verein (SEV), Publikation Nr. 192, Zürich 1948; Fachkollegium 24 des Schweizer. Elektrotechn. Komitees (CES), Bull. SEV **40**, 462, 1949; J. Stulla-Götz, Wissen der Zeit, Nr. 5, Wien 1947; Z. Österr. Ing. Arch. Verein **92**, 148, 1947; M. Tarbouriech, C. R. **221**, 745, 1945; Rev. Gén. Électr. **55**, 151, 1946; F. Wolf, Optik **3**, 81, 1948.